Algorithmen & Datenstrukturen

Woche 2

Marius Tomek, Nicolas Wehrli, Tim Rieder

3. Oktober 2022

ETH Zürich

Organisatorisches

- Rolecall
- Peergrading Heute: Aufgaben 1.1 und 1.4
- Partner Feedback

- Dieses Problem ist nicht sehr zentral.
- Wichtig ist, dass wir verstehen und sehen wie man einen Algorithmus mit einer neuen Idee verbessern und die Laufzeit verkürzt.
- Weiss jemand den Unterschied der Laufzeit beider Ansätze in O-Notation?

Formale Definition: Für eine Laufzeitfunktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ist $\mathcal{O}(f)$ eine Menge die wie folgt definiert ist:

$$\mathcal{O}(f) := \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \exists C > 0,\ \forall n \in N : g(n) \leq C \cdot f(n)\}$$

Grundsätzlich gilt:

$$g \in \mathcal{O}(f) \iff \exists C \in \mathbb{R} : \frac{g}{f} < C, \forall n \in \mathbb{N}$$

Daraus folgt:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{g}{f} = \infty \implies g \notin \mathcal{O}(f)$$

Recap Vorlesung – Ω-Notation and Θ-Notation

Wir haben noch weitere Notationen:

$$\Omega(f) := \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \exists C > 0,\ \forall n \in N : g(n) \geq C \cdot f(n)\}$$

und

$$\Theta(f) := \mathcal{O}(f) \cap \Omega(f)$$

$$g \in \mathcal{O}(f) \wedge g \in \Omega(f) \implies g \in \Theta(f)$$

$$a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 1$$

n	1	2	3	4	5
a_n	1	3	7	15	31

$$a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 1$$

---

n	1	2	3	4	5
a_n	1	3	7	15	31

$$\implies a_n = 2^n - 1.$$

Proof by induction:

Base Case:

For $n = 1$:

$$1 = a_1 = 2^1 - 1 = 1$$

Induction Hypothesis:

We assume

$$a_k = 2^k - 1, k \in \mathbb{N}$$

Induction Step: $k \to k+1$

$$a_{k+1} = 2a_k + 1 \overset{\textbf{I.H.}}{=} 2(2^k - 1) + 1 = 2 \cdot 2^k - 2 + 1 = 2^{k+1} - 1 \quad \square$$

(a): Show $\sum_{i=1}^{n} i^k \leq n^{k+1}$.

Since the terms of the sum are at most n^k, we have:

$$\sum_{i=1}^{n} i^k \leq \sum_{i=1}^{n} n^k = n \cdot n^k = n^{k+1}$$

(b): Show $\sum_{i=1}^{n} i^k \geq \frac{1}{2^{k+1}} \cdot n^{k+1}$.

$$\sum_{i=1}^{n} i^k \geq \sum_{i=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^{n} i^k \geq \sum_{i=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^{n} \left(\frac{n}{2}\right)^k = \left(n - \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1\right) \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^k$$

We have $n - \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \geq \frac{n}{2}$ since $\lceil \frac{n}{2} \rceil \leq \frac{n}{2} + 1$. Therefore

$$\sum_{i=1}^{n} i^k \geq \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^k = \frac{1}{2^{k+1}} \cdot n^{k+1}$$

Übungen – 1.3 Sum of powers of integers

Weshalb haben wir diesen Beweis gemacht?

$$\frac{1}{2^{k+1}} \cdot n^{k+1} \leq \sum_{i=1}^{n} i^k \leq n^{k+1}$$

Weshalb haben wir diesen Beweis gemacht?

$$\frac{1}{2^{k+1}} \cdot n^{k+1} \leq \sum_{i=1}^{n} i^k \leq n^{k+1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^k \leq n^{k+1} \implies \left(\sum_{i=1}^{n} i^k\right) \in \mathcal{O}(n^{k+1})$$

Übungen – 1.3 Sum of powers of integers

Da $C_1 = \frac{1}{2^{k+1}}$, $C_1 \in \mathbb{R}$ eine Konstante, gilt:

$$\frac{1}{2^{k+1}} n^{k+1} \leq \sum_{i=1}^{n} i^k \implies \left(\sum_{i=1}^{n} i^k\right) \in \Omega(n^{k+1})$$

$$\left(\left(\sum_{i=1}^{n} i^k\right) \in \mathcal{O}(n^{k+1})\right) \wedge \left(\left(\sum_{i=1}^{n} i^k\right) \in \Omega(n^{k+1})\right) \implies \left(\sum_{i=1}^{n} i^k\right) \in \Theta(n^{k+1})$$